Ordre, inégalités

I Borne supérieure:

Rappel: Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée possède une borne supérieure.

Faux dans $\mathbb{Q}$: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ ne possède borne sup.

Par l'absurde: si $c = \sup A \in \mathbb{Q}$: on a $c > 0$
$c^2 \leqslant 2$ ie $c \leqslant \sqrt{2}$

si $c < \sqrt{2}$ $\exists x \in \mathbb{Q}$ $c < x < \sqrt{2}$

donc c n'est pas le bs

* Si A non vide et majorée, on a:
$c = \sup A$
$\Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leqslant c$ et $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A,\ c - \varepsilon < x \leqslant c$

✓ Application (exc. pers): 1. Convergence des suites monotones bornées.

2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ croissante majorée Alors f possède une limite ℓ en $+\infty$

Soit $\ell = \sup f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+$ tq $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leqslant \ell$

| f Majorée $\Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+\ f(x) \leqslant M$

par croissance de f et def de la borne sup
$\forall x > x_0\ \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell$
d'où $f(x) \to \ell$

Prop: Soit A non vide majoré

- si $\lambda \geq 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$

$\to$ si $\lambda > 0$: $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda x \end{pmatrix}$ est un isomorphisme

$\to \lambda = 0$: OK

qui préserve l'ordre

- Si $a \in \mathbb{R}$. $\sup(a+A) = a + \sup A$

Fonctions : Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ majorées

i) $\sup\limits_{x\in I} \lambda f(x) = \lambda \sup\limits_{I} f$ si $\lambda \geq 0$

ii) si $a \in \mathbb{R}$ $\sup\limits_{I}(a+f) = a + \sup\limits_{I}(f)$

iii) $\sup\limits_{I} f+g \leq \sup\limits_{I} f + \sup\limits_{I} g$

Dem: $\forall x \in I$ $f(x)+g(x) \leq \sup\limits_{I} f + \sup\limits_{I} g$

De là $\sup\limits_{I} f+g \leq \sup\limits_{I} f + \sup\limits_{I} g$

Conséquence: si $I = [a,b]$, $\| \ \|_\infty$ $\begin{pmatrix} \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \to \sup\limits_{[a,b]} |f| \end{pmatrix}$

est une norme

Ex: Soient A et B deux ens non vides $A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction majorée Alors $\sup f(x,y) = \sup\limits_{x\in A}\left(\sup\limits_{y\in B}(x,y)\right)$

Dem: $M = \sup\limits_{(x,y)\in A\times B} f(x,y)$; pour $x \in A$, $\mu_x = \sup\limits_{y\in B}(x,y)$

Il vient pour $x \in A$ $\forall y \in B$ $f(x,y) \leq M$

c.à.d $\sup\limits_{x\in A} \mu_x \leq M$

- Soit $x, y \in A \times B$ par def $f(x,y) \leq \mu_x \leq \sup\limits_{x\in A} \mu_x$

donc $\sup\limits_{x\in A} \mu_x \geq M$

Borne supérieure d'une famille de fonctions.

Soient | I une partie de $\mathbb{R}$
| $(f_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ une famille de fonctions $I \to \mathbb{R}$, $\Omega \neq \emptyset$

Déf : On dit que i) (f_λ) est majorée si $\forall x \in I$ $(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Omega}$ est majorée

ii) (f_λ) est unif majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tq $\forall \lambda \in \Omega$ $\forall x \in I$ $f_\lambda(x) \leq M$

iii) — bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall \lambda \in \Omega$ $\forall x \in I$ $|f_\lambda(x)| \leq M$

Prop : si Ω est fini ($\neq \emptyset$) et si chaque f_λ est $\mathcal{C}^0$, $\sup\limits_{\lambda \in \Omega} f_\lambda$ est $\mathcal{C}^0$

On se ramène à une VA : $\sup(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\left(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|\right)$

Par récurrence : si $n \geq 3$ $\sup(f_1, \dots, f_n)$

$= \sup(\sup(f_1, \dots, f_{n-1}), f_n)$ est $\mathcal{C}^0$

⚠ C-ex pour Ω infini : $f_n(x) = 1 - x^n$, $x \in [0,1]$

est unif bornée

soit $g = \sup f_n$ | $x = 1$: $g(1) = 0$
| $0 \leq x < 1$ $g(x) = 1$ non $\mathcal{C}^0$.

n

II Encadrements

Prop : Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b \iff \forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon$

Dem : $\Rightarrow$ OK $\Leftarrow$ si $a > b$, on choisit $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$
il vient $b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} < a$

Encadrements : Si $0 < a' \leq a \leq a''$
$0 < b' \leq b \leq b''$ | $\frac{a'}{b''} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{a''}{b'}$

Valeurs absolues : * si $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

* Si $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $n \geq 2$

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2}) + |z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$

$\Rightarrow$ symétrie

Extension : Si $\sum |z_n|$ CV $\sum z_n$ aussi et
$|\sum z_n| \leq \sum |z_n|$

Appl : Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$ $(u_n) \to l \neq 0$
alors $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{l}$

Dem : Soit $\varepsilon > 0$: $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|}$

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad |u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$

$|\ell| - |u_n| \leq |u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$

donc $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$

$\forall n \geq N \quad \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \frac{2|u_n - \ell|}{|\ell|^2}$

- Cas d'égalité : (*)

$n=2$ ~~$|z_1 + z_2| = |z_1 + z_2|$~~

z_1 et z_2 sont sur une même droite d'origine 0

$n \geq 3$: par récurrence, en supposant que $\forall z_i \neq 0$

On part de $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$

On écrit $|z_1| + \dots + |z_n| \leq |z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2 + \dots + z_n|$

~~il y a égalité partout : $|z_1 + \dots + z_n| = |z_2| + \dots + |z_n|$~~

il y a égalité partout $|z_2 + \dots + z_n| = |z_2| + \dots + |z_n|$

(HR) $z_2, \dots, z_n \in \Delta$ demi-droite d'origine 0

$z = z_2 + \dots + z_n$, on a $z \in \Delta$, $z \neq 0$ et $|z_1 + z| = |z_1| + \dots + |z_n|$

$|z_1| + |z|$

- Ex : Soit $p \geq 3$ $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $u_{n+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=n}^{n+p-1} u_i$

a- polynôme caractéristique $X^p - \frac{1}{p}(X^{p-1} + \dots + 1)$

b- Mq $P(z) = 0 \Rightarrow P'(z) \neq 0$

c- Mq (u_n) CV

Ex : On suppose $\forall z \in \mathbb{N}$ $z_n \neq 0$ et $\sum |z_n|$ CV

~~DONNE~~

donner une CNS pour avoir $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$

S/S il existe $u \in S^1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_n = r_n u$, $r_n > 0$

$\forall n$ $|z_0 + \dots + z_n| = r_0 + \dots + r_n$

$= |z_0| + \dots + |z_n|$

d'où $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right| = \sum_0^{+\infty} |z_n|$

** Montrons que cette condition est nécessaire

(i) S'il existe $N \in \mathbb{N}^*$: $|z_0 + \dots + z_N| < |z_0| + \dots + |z_N|$

On a aussi $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{N+1}^{+\infty} |z_n|$

donc $\left|\sum z_i\right| \leqslant |z_0 + \dots + z_n| + \left|\sum_{N+1}^{+\infty} z_n\right| < \sum_0^{+\infty} |z_n|$

d'où Contradiction

donc $\forall N \in \mathbb{N}$ $|z_0 + \dots + z_N| = |z_0| + \dots + |z_N|$

(ii) ~~do~~ Soit $\Delta = \mathbb{R}^+ z_0$ $(z_0 \neq 0)$ il vient $z_0 \in \Delta, \dots, z_n$

Variante : Minkowski $\begin{cases} \|\ \|_2 \\ \|\ \|_p \quad p > 1 \quad (p < +\infty) \end{cases}$

• Exercice (Mercredi) :

Soit $P = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$

$\rho = \max\{|z|, P(z) = 0\}$ Mq $\begin{cases} \rho^{\dots} \leqslant 1 + \max(a_i \dots \\ \rho \leqslant \max\left(1, \sum |a_n|\right) \end{cases}$

Appl : Si $P_\lambda(z) = z^n + a_{n-1,\lambda} z^{n-1} + \dots + a_{1,\lambda} z + a_{0,\lambda}$ est une famille de Pol. unitaires de $\mathbb{C}$ de degré n tq $(a_{k,\lambda})_{k\in\{0,\dots,n-1\}, \lambda\in\Lambda}$ est borné alors les P_λ forment une partie bornée du plan.

III Schwarz, Abel, ...

I Inégalité de CS.

Th : Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(x_i), (y_i) \in \mathbb{R}^n$ Alors :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

D/ Inégalité de Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = -\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

Termes restants : $\left| \begin{array}{l} x_i y_i x_j y_j - (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) \\ i \neq j \quad\quad = -(x_i y_j - y_i x_j)^2 \\ i<j \end{array}\right.$

$n=2$: $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$

$(|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

valable dans un anneau commutatif

$n=4$ $\left(\sum_1^4 x_i^2\right)\left(\sum_1^4 y_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i y_i\right)^2 + \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$

nombres CMPLX $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i\right| \leqslant \sum_1^m |z_i||w_i| \leqslant \left(\sum_1^m |z_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^m |w_i|^2\right)^{1/2}$

Cas d'égalité $\mathbb{R}^n$: $\forall i<j$, $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0$

ie tous les mineurs de $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ de taille 2 sont nuls, cette matrice est de rang ≤ 1

(X, Y) liée

- Ex : Soit ~~$A \in \mathcal{S}_n$~~ $A \in S_n^{++}$ M q $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|X\|^2 \leq \langle AX | X\rangle^{1/2} \langle A^{-1} X | X\rangle^{1/2}$$

Cas 1 : A diago : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

$$\langle AX, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

$$\langle A^{-1}X, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} \cancel{\lambda_i} \frac{x_i^2}{\lambda_i}$$

$$\|X\|^2 =$$

- Ex : On suppose $x_1, \dots, x_n \geq 0$, $x_1 + \dots + x_n = 1$

max et min $\sum_{i \neq j} x_i x_j$

Intégrales :

Soient f, g CPM, $(a, b) \in \mathbb{C}$

$$\left| \int_a^b f g(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2} \sqrt{\int_a^b |g|^2}$$

Sommes de Riemann : $t_k = a + k \frac{b-a}{n}$

$x_k = f(t_k)$ $y_k = g(t_k)$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2}$$

$$n \to +\infty \quad \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^2}\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b |g|^2}$$

Minkowski $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

Par élévation au carré avec Schwarz Analogue intégral

Inégalité de réarrangement :

Soient $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ des nbres réels et $\sigma \in$

$0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

D/ On suppose WLOG $\left| \begin{array}{l} a_1 < \dots < a_n \\ b_1 < \dots < b_n \end{array}\right.$

On suppose : $i \in [1,n]$ $\sigma(i) \neq i$ par ex $\sigma(1)=2$ $\sigma(2)=1$

$a_2 b_1 + a_1 b_2 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$

$\Leftrightarrow (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0$

$i > j$

$\sigma(i) < \sigma(j)$, $\underbrace{(a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)})}_{0}\underbrace{(b_i - b_j)}_{<0} < 0$

$(a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)})$

* page suiv

$a_{\sigma(i)} b_i + a_{\sigma(j)} b_j$

$a_{\sigma(i)} b_i + a_{\sigma(j)} b_j < a_{\sigma(j)} b_i + a_{\sigma(i)} b_j$

On augment la somme en remplaçant

~~$a_{\sigma(i)} b_i + a_{\sigma(j)} b_j$~~ σ par $\tau_{\sigma(i)\sigma(j)} \circ \sigma = \sigma'$

* $\boxed{\sum_{1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i)} b_i > \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} b_i}$

σ est strictement $\nearrow$, donc $\sigma = \mathrm{id}$

IV Etude de fonctions

a- Fonctions homographiques

Def

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, si $c=0$, $d \neq 0$

$f'(x) = \frac{da-bc}{(cx+d)^2}$ strictement monotone par inter

b- Accroissement finis

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ dable sur $]a,b[$

(i) si $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ $\exists c \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Cas général : un tel c n'existe pas $a=0$, $b=2\pi$

$f(x) = e^{ix}$

IAF : si $|f'|$ est bornée par $M \geq 0$

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$$

* si f' est cste $\mathcal{C}^0$ on a l'égalité

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

$$|f(b) - f(a)| \leq \int_a^b |f'| \left(\leq \|f'\|_{\infty,[a,b]}(b-a)\right)$$

RM : on écrit $\int_a^b g = e^{i\theta} \left|\int_a^b g\right|$

de là $\int_a^b e^{-i\theta} g(t)\,dt = \left|\int_a^b g\right|$
$= \left|\int_a^b e^{-i\theta} g(t)\,dt\right|$

$u+iv = e^{-i\theta} g$

il vient $\int_a^b u + i\int_a^b v = \left|\int_a^b (u+iv)\right| \in \mathbb{R}^+$

donc $\int_a^b v = 0$: $\left|\int_a^b g\right| = \left|\int_a^b u\right| \leq \int_a^b |u|$
$\leq \int_a^b |u+iv|$

C- Puissances :

Exo (X) :

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On suppose $0 < r < 1$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^r$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)^r$ CV, nature de $\sum a_n$?

Comparer $\sum a_n^r$ et $\left(\sum a_n\right)^r$

(i) $a_n \to 0$ car $\sum a_n^r$ CV donc $a_n^r \to 0$
comme $r \in [0,1[$ $0 \leq a_n \leq a_n^r$
apr CR

De là $\left(\sum a_n\right)$ CV

Lemme : Si $r \in]0,1[$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x+y)^r \leq x^r + y^r$

SNG : $x > 0$, $y > 0$

on divise par x et on pose $t = \frac{y}{x}$

on pose $\varphi(t) = (1+t)^r - t^r - 1$

$\varphi'(t) = r\left(t^{r-1} - (1+t)^{r-1}\right)$ avec $r-1 < 0$

$\varphi'(t) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc φ ↗

or $\varphi(0) = 0$ donc $\forall t \geq 0$ $\varphi(t) \geq 0$

d'où le résultat

- Ex perso : Si $n \geq 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ $(x+y)^n \geq x^n + y^n$

d- Trigo :

a- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$

b- $\forall x \in [0, \pi/2]$ $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$

c- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$

D/ i) Récurrence $|\sin((n+1)x)| = |\cos x \sin nx + \cos nx \sin x|$

$\leq (n+1) \sin(nx)$

ii) concave sur $[0, \pi/2]$

iii) $1 + \dots + e^{nx} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{\frac{nx}{2}} \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)} \right)$

donc $|\,| \leq \frac{1}{|\sin x/2|}$

S_n est uniformément bornée en n à x fixé

Ex : $u_{n+p} = \frac{1}{p}(u_{n+p-1} + \dots + u_n)$

Polynôme caractéristique : $z^{p} = \frac{1}{p}(z^{p-1} + \dots + 1)$

si $z \neq 0$, on obtient $\chi(z) = pz^p - (z^{p-1} + \dots + 1)$

si $|z| > 1$ donc $|z|^p > 1, \dots, |z|^p > |z|^{p-1}$

en sommant $p|z|^p > 1 + \dots + |z|^{p-1} \geq |1 + \dots + z^{p-1}|$

donc $X(z) \neq 0$ ↯

$X(1) = 0$; si z est une racine de U

$$1 = |z|^p = \frac{1}{p}\left(1 + \dots + |z|^{p-1}\right)$$

$$|z|^p = \frac{1}{p}\left|1 + \dots + z^{p-1}\right| =$$

donc $z \in$ à la droit engendrée par 1
donc $z = 1$

(CCP) si z est une racine de X différente de 1
on a $|z| < 1$, $|z|^n \to 0$

Pour finir on montre que toutes les racines de X sont simples

$$X(z) = pz^p - \frac{z^p - 1}{z-1} = \frac{pz^p(z-1) - z^p + 1}{z-1}$$

$$= \frac{\overbrace{pz^{p+1} - (p+1)z^p + 1}^{Q(z)}}{z-1} \quad (z \neq 1)$$

on étudie la dérivée $X'(1) = p^2 - \frac{p(p-1)}{2} > 0$

pour $z \neq 1$, et $X(z) = 0$, $(z-1)Q'(z) = p(p+1)z^p - p(p+1)z^{p-1}$
$= p(p+1)z^{p-1}(z-1)$
$\neq 0$

(CC) X possède p racines $\neq$ 2 à 2
des racines $\neq 1$ de X de module < 1
(u_n) est CL des suites (z^n) avec $X(z) = 0$
$\to$ convergent

$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$

$\rho = \max_{z \in Z(P)} |z|$. Mq $\rho \leq 1 + \max a_k$

D/ Soit $z \in Z(P)$ tq $|z| = \rho$ si $|z| \leq 1$ OK

si $|z| > 1$ il vient $|z^n| = |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0|$

$\leq |a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|$

Identifie $\rho^n \leq |a_{n-1}| \rho^{n-1} + \dots + |a_0|$

de là $\rho^n \leq \mu (\rho^{n-1} + \dots + 1)$

c.à.d $\rho^n \leq \mu \dfrac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$

$\rho^n (\rho - 1) \leq \mu (\rho^n - 1) \leq \mu \rho^n$

c.à.d $\rho \leq \mu + 1$